Автор: словарь
08.01.2008 02:50 -

ГЁДЕЛЬ (Godel) Курт (1906 — 1978) — математик и логик, член Национальной Академии наук США и Американского философского общества, автор фундаментального открытия ограниченности аксиоматического метода и основополагающих работ в таких направлениях математической логики, как теория моделей, теория доказательств и теория множеств. В 1924 Г. поступил в Университет Вены. Доктор математики (1930).

Приват-доцент Университета Вены, член Венского кружка (1933—1938).

Эмигрировал в США (в 1940, с 1953 — профессор Принстонского института перспективных исследований). Основные труды: "Полнота аксиом логического функционального исчисления" (докторская диссертация, 1930), "О формально неразрешимых предложениях Principia mathematica и родственных систем" (1931), "О интуиционистском исчислении высказываний" (1932), "О интуиционистской арифметике и теории чисел" (1933), "Одна интерпретация интуиционистского исчисления высказываний" (1933), "Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств" (1940), "Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения" (1958). В конце 1920-х Гильбертом и его последователями были получены доказательства полноты некоторых аксиоматических систем. Полнота аксиоматической системы рассматривалась ими как свойство системы аксиом данной аксиоматической теории, характеризующее широту охвата этой теорией определенного направления математики. В математических теориях, конструируемых на основаниях материальной аксиоматики, значения исходных терминов аксиоматической теории даны с самого начала (т.е. определенную интерпретацию данной теории полагают фиксированной).

В рамках такой теории стали возможны рассуждения о выводимости ее утверждений из аксиом и рассуждения об истинности таких утверждений. Полнота системы аксиом в данном случае соответствовала совпадению этих понятий. (Пример аксиоматики такого вида — аксиоматика геометрии Евклида.) В математических теориях, конструируемых на основаниях формальной аксиоматики, значения исходных терминов аксиоматической теории остаются неопределенными во время вывода теорем из аксиом.

В данном случае система аксиом называлась полной относительно данной интерпретации, если из нее были выводимы все утверждения, истинные в этой интерпретации.

Наряду с таким понятием полноты определялось и другое ее понятие, являвшееся внутренним свойством аксиоматической системы (не зависимым ни от одной из ее интерпретаций): систему аксиом называли дедуктивно полной, если всякое утверждение, формулируемое в данной теории, может быть либо доказанной (являясь в таком случае теоремой), либо опровергнутой (в смысле возможности доказательства его отрицания). При этом, если аксиоматическая теория полна относительно некоторой интерпретации, то она является дедуктивно полной; и наоборот, если теория дедуктивно полна и непротиворечива (т.е. все теоремы истинны) относительно данной интерпретации, то она является полной относительно этой интерпретации. Понятие дедуктивной (внутренней) полноты — "удобная характеристика" аксиоматической теории при конструировании ее в виде формальной системы. На таком основании Гильбертом была выстроена искусственная система, включающая часть арифметики, с доказательствами ее полноты и непротиворечивости. Подход Г. в целом относится к конструктивному направлению математики: в интуиционистской трактовке истинности высказывания истинной он считал только рекурсивно реализуемую формулу (сводимую к функции от чисел натурального ряда). Тем самым интуиционистская арифметика становилась расширением классической. Одновременно конструируя и логику, и арифметику, Г. вынужденно отказался от логицистского тезиса

Фреге о полной редуцируемости математики к логике. Г. обосновывал математику разработанным им же методом арифметизации метаматематики, заключающимся в замене рассуждений о выражениях любого логико-математического языка рассуждениями о натуральных числах.

Этот метод Г. поместил в основу доказательства "теоремы Г. о полноте" исчисления предикатов классической логики предикатов (первого порядка), а позднее — в две важнейшие теоремы о неполноте расширенного исчисления предикатов, известных под общим названием "теорема Г. о неполноте". Г. в своей докторской диссертации (1930) доказал теорему о полноте исчисления классической логики предикатов: если предикатная формула истинна в любой интерпретации, то она выводима в исчислении предикатов (другими словами, любая формула, отрицание которой невыводимо, является выполнимой). Являясь одной из базисных теорем математической логики, теорема Г. о полноте показывает, что уже классическое исчисление предикатов содержит все логические законы, выражаемые предикатными формулами. Усиление теоремы о полноте классического исчисления логики предикатов утверждает, что всякая счетная последовательность формул, из которой нельзя вывести противоречия, выполнима. При этом, если из множества предикатных формул Р невозможно вывести противоречие в рамках предикатного исчисления, то для множества Р существует модель, т.е. интерпретация, в которой истинны все формулы множества Р. Доказательство полноты исчисления классической логики предикатов породило в школе Гильберта некоторые надежды на возможность доказательства полноты и непротиворечивости всей математики. Однако уже в следующем, 1931, году была доказана теорема Г. о неполноте. Первая теорема о неполноте утверждает, что если формальная система арифметики непротиворечива, то в ней существует как минимум одно формально неразрешимое предложение, т.е. такая формула

F, что ни она сама, ни ее отрицание не являются теоремами этой системы. Иными словами, непротиворечивость рекурсивной арифметики делает возможным построение дедуктивно неразрешимого предложения, формализуемого в исчислении, т.е. к существованию и недоказуемой, и неопровержимой формулы. Такая формула, являясь предложением рекурсивной арифметики, истинна, но невыводима, несмотря на то, что по определению она должна быть такой.

Следовательно, непротиворечивость формализованной системы ведет к ее неполноте. Усилением первой теоремы о неполноте является вторая теорема о неполноте, утверждающая, что в качестве формулы F возможен выбор формулы, естественным образом выражающей непротиворечивость формальной арифметики, т.е. для непротиворечивого формального исчисления, имеющего рекурсивную арифметику в качестве модели, формула F выражения этой непротиворечивости невыводима в рамках данного исчисления. Согласно теореме Г. о неполноте, например, любая процедура доказательства истинных утверждений элементарной теории чисел (аддитивные и мультипликативные операции над целыми числами) заведомо неполна.

Для любых систем доказательств существуют истинные утверждения, которые даже в таком достаточно ограниченном направлении математики останутся недоказуемыми. Б.В.Бирюков пишет о методологическом значении теоремы Г. о неполноте: "...если формальная арифметика непротиворечива, то непротиворечивость нельзя доказать средствами, формализуемыми в ней самой, т.е. теми финитными средствами, которыми Гильберт хотел ограничить метаматематические исследования...". Следовательно, (внутреннюю) непротиворечивость любой логико-математической теории невозможно доказать без обращения к другой теории (с более сильными допущениями, а следовательно менее устойчивой). Фон Нейман читал в момент публикации работы Г. лекции по метаматематической программе Гильберта, однако сразу после прочтения этой работы он перестроил курс, посвятив Г. все оставшееся время. Теорема Г. о неполноте — важнейшая метатеорема математической логики — показала неосуществимость программы Гильберта в части полной формализации определяющей части математики и обоснования полученной формальной системы путем доказательства ее непротиворечивости (финитными методами).

Однако теорема Г. о неполноте, демонстрируя границы применимости финитного подхода в математике, не может свидетельствовать об ограниченности логического знания. Э.Нагель и Дж.Ньюмен о значении открытий Г. для сравнительной оценки возможностей человека и компьютера пишут, что "...для каждой нашей конкретной задачи, в принципе, можно построить машину, которой бы эта задача была под силу; но нельзя создать машину, пригодную для решения любой задачи. Правда, и возможности человеческого мозга могут оказаться ограниченными, так что и человек тогда сможет решить не любую задачу. Но даже если так, структурные и функциональные свойства человеческого мозга пока еще намного больше по сравнению с возможностями самых изощренных из мыслимых пока машин... Единственный непреложный вывод, который мы можем сделать из теоремы Г. о неполноте, состоит в том, что природа и возможности человеческого разума неизмеримо тоньше и богаче любой из известных пока машин...". Г. также внес значительный вклад в аксиоматическую теорию множеств, два базисных принципа которой — аксиома выбора Э.Цермело и континуум-гипотеза — долгое время не поддавались доказательству, однако вследствие значимости их логических следствий исследования в этих направлениях продолжались.

В аксиоме выбора Э.Цермело постулируется существование множества, состоящего из элементов, выбранных "по одному" от каждого из непересекающихся непустых множеств, объединение которых составляет некое множество. (Из аксиомы выбора Э.Цермело выводимы следствия, противоречащие "интуиции здравого смысла". Например, возникает возможность разбиения трехмерного шара на конечное количество подмножеств, из которых возможно движениями в трехмерном пространстве реконструировать два точно таких же шара.) Континуум-гипотеза — это утверждение о том, что мощность континуума (мощность, которую имеет, например, множество всех действительных чисел) есть первая мощность, превосходящая мощность множества всех натуральных чисел.

Обобщенная континуум-гипотеза гласит, что для любого множества М первая мощность, превосходящая мощность этого множества, есть мощность множества всех подмножеств множества Р. Эта проблема (высказанная Кантором в 1880-х) была включена в знаменитый список 23 проблем Гильберта. В 1936 Г. доказал, что обобщенная континуум-гипотеза совместима с одной естественной системой аксиоматической теории множеств и, следовательно, не может быть опровергнута стандартными методами. В 1938 Г. доказал непротиворечивость аксиомы выбора и континуум-гипотезы (интеграция их в заданную систему аксиом теории множеств не вела к противоречию). Для решения этих проблем была редуцирована аксиоматическая система П.Бернайса, на основе которой, а также предположения о конструктивности каждого множества Г. выстроил модель, адекватную системе аксиом без аксиомы выбора, и такую, что в ней все множества обладали свойством полной упорядочиваемости. В этой модели аксиома выбора оказалась истинной (выполнимой) и, следовательно, совместимой с исходной системой аксиом, следовательно непротиворечивой.

В этой модели оказалась истинной и континуум-гипотеза. Дальнейшие работы в этом направлении позволили Г. разработать конструкции для исследования "внутренних механизмов" аксиоматической теории множеств. Кроме работ в указанных направлениях, Г. предложил в 1949 новый тип решения одного важного класса уравнений общей теории относительности, который был расценен Эйнштейном как "...важный вклад в общую теорию относительности..." и был удостоен Эйнштейновской премии (1951).

С.В. Силков